



MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
JIZZAX FILIALI

**KOMPYUTER ILMLARI VA
MUHANDISLIK TEXNOLOGIYALARI**
XALQARO ILMIY-TEXNIK
ANJUMAN MATERIALLARI
TO'PLAMI
1-QISM



26-27-SENTABR
2025-YIL



Google
Scholar



**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA
INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETINING JIZZAX FILIALI**



**KOMPYUTER ILMLARI VA MUHANDISLIK
TEXNOLOGIYALARI**
mavzusidagi Xalqaro ilmiy-texnik anjuman materiallari
to‘plami
(2025-yil 26-27-sentabr)
1-QISM

JIZZAX-2025

НОВАЯ ПОСТАНОВКА ТЕРМО-УПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ

М.Н.Абдирахмонова, Р.А. Рахмонова, Н.Ф. Эшманова

Самаркандский филиал Ташкентского университета
информационных технологий

Аннотация: Статья посвящена формулировке краевых задач термоупругости относительно деформаций. В рамках условий совместности деформаций Сен-Венана, сформулированы два варианта краевых задач термоупругости относительно деформаций. В первую краевая задача состоит из трех недиагональных дифференциальных уравнений совместности температурных деформаций и трех уравнений равновесия выраженных относительно деформаций.

Ключевые слово: деформация, температура, условия Сен-Венана, напряжение, краевая задача, уравнения равновесия, граничные условия, метод итерации, метод прогонки.

Дифференциальные уравнения совместности термоупругих деформаций при отсутствии объемных сил имеют вид [1, 2]

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + K \theta_{,ij} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} T_{,ij}, \quad (1)$$

умножая уравнения (1) на δ_{ij} найдем, что

$$\nabla^2 \theta + K \nabla^2 \theta = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} \nabla^2 T, \quad (2)$$

или

$$(1 + K) \nabla^2 \theta = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} \nabla^2 T, \quad (3)$$

с учетом, что $K = 1 + \frac{\lambda}{\mu}$, можно найти, что

$$\nabla^2 \theta = \nabla^2 \left(\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2(\lambda + 2\mu)} T \right), \quad (4)$$

из последнего уравнения можно найти, что

$$\theta = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2(\lambda + 2\mu)} T + C. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), найдем следующее уравнение

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \frac{(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu(\lambda + 2\mu)} T_{,ij} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{2\mu} T_{,ij}, \quad (6)$$

из последнего уравнения (6) после упрощения можно найти следующее уравнение Пуассона относительно шести компонентов тензора деформаций

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha T_{,ij}, \quad (7)$$

с соответствующими тремя поверхностными граничными условиями

$$(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{ij})n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i, \quad (8)$$

а также тремя дополнительными граничными условиями, полученными на основе уравнений равновесия

$$(\lambda\theta_{,i} + 2\mu\varepsilon_{ij,j} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{ij,j} + X_i) \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (9)$$

Уравнения (7-9) представляют собой новую краевую задачу термоупругости в деформациях (**Задача А**). Краевую задачу (7-9) рассмотрим в двумерном случае для прямоугольной области т.е. (**Задача А^{2D}**)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} &= \alpha \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} &= \alpha \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} &= \alpha \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (10)$$

с соответствующими граничными условиями на сторонах прямоугольника

$$\sigma_{ij}n_j \Big|_{x=0,l_1} = \varphi_i(y), \quad \sigma_{ij}n_j \Big|_{y=0,l_2} = \gamma_i(x), \quad (11)$$

а также “дополнительными” условиями на границе прямоугольника – Γ :

$$\begin{aligned} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right] \Big|_{\Gamma} &= 0, \\ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right] \Big|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В этих уравнениях температурное поле $T(x, y)$ как решение уравнения теплопроводности считается известным [2, 3].

Пусть заземленный со всех сторон прямоугольная пластина находится в заданном температурном поле, т.е. [2]

$$T = T_0 \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad (13)$$

со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \Big|_{x=0,l_1} &= 0, \quad \sigma_{12} \Big|_{x=0,l_1} = 0, \\ \sigma_{22} \Big|_{y=0,l_2} &= 0, \quad \sigma_{21} \Big|_{y=0,l_2} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Исходные данные параметров имеют следующие безразмерные значения

$$\lambda = 1.5, \mu = 0.75, \alpha = 0.125, T_0 = 20^\circ \text{C}, l_1 = l_2 = 1, N_1 = N_2 = 10.$$

Таблица 1. Сравнение напряжений σ_{11} в середине пластины при $y=0.5$

Задачи $y=0.5$;	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Краевая задача (25) A^{2D}	0.000	1.163	2.211	3.043	3.577	3.760
Задача в перемещениях [1]	0.000	2.699	3.023	3.398	3.677	3.778
Задача в напряжениях [2]	0.000	1.151	2.188	3.012	3.541	3.723

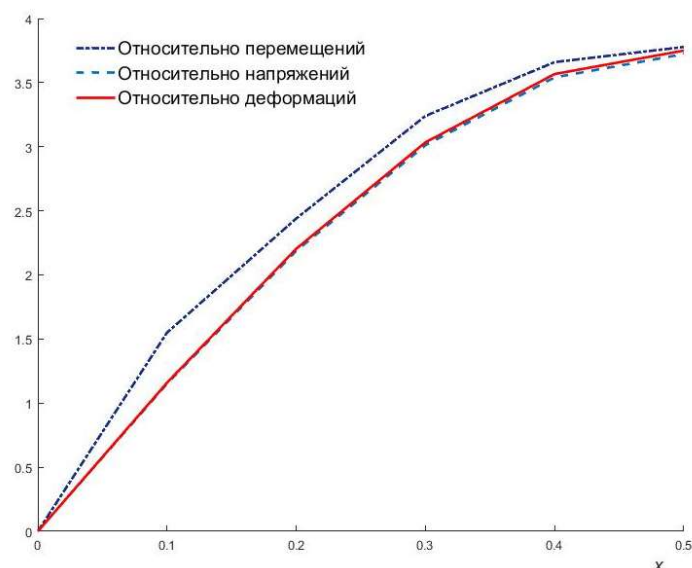


Рис 1. Сравнение значения напряжений σ_{11} в середине прямоугольника

Термоупругая задача сведена к системе шести уравнений Пуассона относительно компонентов тензора деформаций с температурной правой частью. При формулировке краевых задач на ряду с естественными граничными условиями, введены также три дополнительных условия в рамках уравнений равновесия. Конечно-разностным методом составлены сеточные уравнения, решаемые итерационным методом и методом переменных направлений в сочетании с методом прогонки.

Литература:

1. Каландаров А.А. Численное моделирование термоупругих задач для изотропных и анизотропных тел. Диссертационная работа, Ташкент 2019, 140 ст.
2. A.A. Khaldjigitov., O. Tilovov. & Z. Xasanova. "A new approach to problems of thermoelasticity in stresses," Journal of Thermal Stresses, 47(9), pp. 1228–1241. <https://doi.org/10.1080/01495739.2024.2379803>
3. Turimov D., Khaldjigitov A., Djumayozov U., Wooseong Kim. "Formulation and Numerical Solution of Plane Problems of the Theory of Elasticity in Strains," Mathematics 2024, 12, 71. <https://doi.org/10.3390/math12010071>
4. Khaldjigitov A, Djumayozov U, Tilovov O. "A new approach to numerical simulation of boundary value problems of the theory of elasticity in stresses and strains," «EUREKA: Physics and Engineering» №2 pp 107-120. <https://doi.org/10.21303/2461-4262.2023.002713>